Estudios Matemáticos

Proyecto: <u>“Las sucesiones dentro de la geometría”</u>

2008

A2

Sucesiones

Introducción:
En este trabajo me propongo investigar y analizar algunas sucesiones geométricas. Es decir aplicar los conceptos de sucesiones a problemas que se plantean desde la geometría. Para ello primero mostraré algunas relaciones entre problemas muy sencillos con las sucesiones aritméticas y geométricas, como son la suma de los ángulos interiores de un polígono y un problema de áreas de sucesivos cuadrados.
Luego analizaré un problema interesante en donde a medida que variamos la cantidad de lados de la figura y la medida inicial del mismo descubrimos las sucesiones que se van generando. Finalmente trataré de generalizar dicho problema independizándolo de la medida inicial de su lado; buscando resultados generales que me permitan sacar conclusiones.

Recordemos algunos conceptos:
En este apartado recordaré algunos conceptos básicos sobre las sucesiones que usare en el desarrollo del trabajo.
Una sucesión es una serie de números, uno tras otro, que llevan un cierto orden. Pueden finitas o infinitas. Se denomina término a cada elemento de la serie de números. Cada término de la sucesión es denominada con una letra, por ejemplo

$$a_1 , a_2 , a_3 \ldots a_n$$

Esto se refiere al término primero, al segundo término, al tercer término y al término enésimo. El subíndice indica el lugar que ocupa el término en la sucesión.
Hay muchos tipos de sucesiones, uno de ellos son las sucesiones aritméticas.

- Sucesiones aritméticas

Estas consisten en una sucesión en la cual cada término se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constate (d), denominada diferencia. Su término general es:

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

B3

I. Veamos un ejemplo desde la geometría:
Consideremos a los polígonos y la suma de sus ángulos interiores, veamos los datos que aparecen en la tabla

Cantidad de lados del polígono	Suma de los ángulos interiores
3	180°
4	360°
5	540°
6	720°
7	900°
8	1080°
9	1260
10	1440°
..	..
n	(n-2).180°

2

La suma de los ángulos interiores forman una sucesión aritmética. Podemos pensar en una sucesión del tipo 180º, 360º, 540º, 720º, … y su expresión general en función de la cantidad de lados del polígono será S (ángulos interiores)= (n-2).180º donde n es un numero natural mayor o igual a 3.

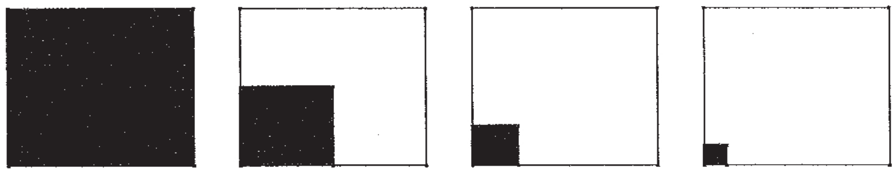
- Sucesiones Geométricas:

Cada término en una sucesión geométrica se obtiene multiplicando al número anterior por uno fijo denominado razón de la progresión (r). Su término general es

$$\boxed{a_n = a_{n-1}.r} \quad \text{ó} \quad \boxed{a_n = a_1 .r^{n-1}}$$

II. Veamos otro ejemplo desde la geometría:
Consideremos la sucesión que se obtiene al calcular las áreas de los cuadrados pintados de azul que se ven a continuación sabiendo que el lado del primer cuadrado mide 1. En el segundo cuadrado cada lado se reduce a la mitad del primero. En el tercer cuadrado cada lado se reduce a la mitad del segundo, y así sucesivamente.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



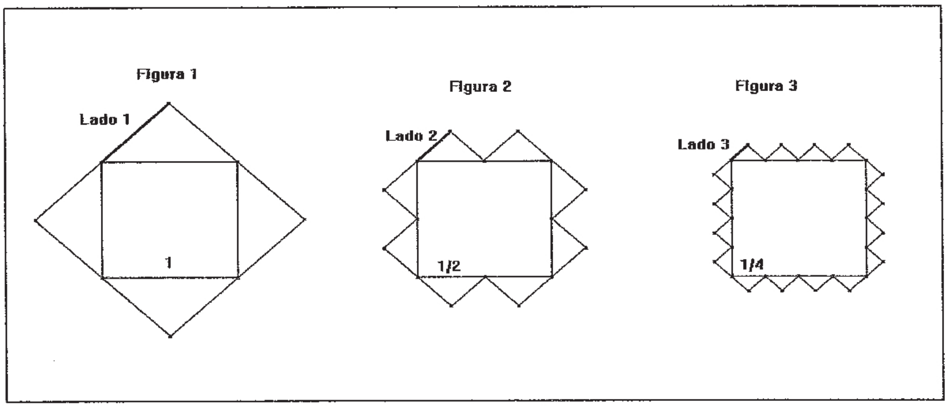
Calculo de las áreas de los cuadrados azules:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \qquad a_4 = \left(\frac{1}{8}\right)^2$

En general: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ Podemos ver que las áreas de los cuadrados azules forman una sucesión geométrica de razón 1/4

III. Ahora analizaremos un interesante problema Geométrico en donde también aparecen las sucesiones.
Dibujamos un cuadrado de lado 1 y sobre cada lado un triángulo rectángulo isósceles. Para el segundo cuadrado dibujamos dos triángulos isósceles sobre cada lado, para el tercer cuadrado cuatro triángulos por lado y así sucesivamente.

B3



Nos interesa estudiar el perímetro de estas figuras. Para poder analizarlos primero debemos calcular la medida de los lados.

Cálculo de cada lado del triángulo de la figura 1:
Apliquemos Pitágoras

$$x^2 + x^2 = 1^2$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = 1/2$$
$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x = \sqrt{1/2} . 2/\sqrt{2}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Cálculo de un lado para la figura 2

$$x^2 + x^2 = \left(1/2\right)^2$$
$$2x^2 = 1/4$$
$$x^2 = 1/8$$
$$x = \sqrt{1/8}$$
$$x = \sqrt{1}/\sqrt{8}$$
$$x = 1/\sqrt{4.2}$$
$$x = \frac{1}{2.\sqrt{2}} \cdot \frac{2.\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$L_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

4

Cálculo de un lado para la figura 3

$$x^2 + x^2 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2$$
$$2x^2 = \tfrac{1}{16}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{32}$$
$$x = \sqrt{1/32}$$
$$x = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16.2}}$$
$$x = \frac{\sqrt{1}}{4\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{1}{4.\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$L_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Calculo de un lado para la figura 4

Espero encontrarme con x= $\tfrac{1}{16}\sqrt{2}$ si la secuencia continua de la misma manera.

$$x^2 + x^2 = \left(\tfrac{1}{8}\right)^2$$
$$2x^2 = \tfrac{1}{64}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{128}$$
$$x = \sqrt{1/128}$$
$$x = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{64.2}}$$
$$x = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{1}{8.\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{8.2}$$
$$x = \tfrac{1}{16}\sqrt{2}$$

$$L_4 = \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{16}.\sqrt{2}$$

5

Anotamos las medidas encontradas en la tabla.
Como se puede ver hemos encontrado una sucesión geométrica.

B3

Figura	Lado
1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$
3	$\frac{1}{8}\sqrt{2}$
4	$\frac{1}{16}\sqrt{2}$

Vemos que se presenta una sucesión de $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ porque

$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$a_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$a_3 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$

Esta sucesión seguiría así

B3

Figura	Lado
5	$\frac{1}{32}\sqrt{2}$
6	$\frac{1}{64}\sqrt{2}$
7	$\frac{1}{128}\sqrt{2}$
n	$\frac{1}{2^n}\sqrt{2}$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2^n}.\sqrt{2}}$$

C5

¿Qué pasa en la figura 20? Usamos la fórmula y obtenemos

$$L_{20} = \frac{\sqrt{2}}{2^{20}}$$

$$L_{20} = \frac{\sqrt{2}}{2^{20}} = \left(\frac{1}{2^{20}}\right)\sqrt{2}$$

6

A partir de los cálculos realizados podemos sacar como conclusión que para una figura enésima se cumplirá que

$$Ln = \frac{1}{2^n}\sqrt{2}$$

C5

Ahora calculemos los perímetros

B3

Figura	Lado	Perímetro	Resultado
1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)8$	$4\sqrt{2}$
2	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)16$	$4\sqrt{2}$
3	$\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)32$	$4\sqrt{2}$
4	$\frac{1}{16}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{16}\sqrt{2}\right)64$	$4\sqrt{2}$
5	$\frac{1}{32}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{32}\sqrt{2}\right)128$	$4\sqrt{2}$
n	$\frac{1}{2^n}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{2^n}\sqrt{2}\right).2^{n+2}$	$4\sqrt{2}$

Podemos observar que el perímetro es constante, es decir no depende de la medida del lado.
Cabe preguntarse que pasa cuando $n \to \infty$ para la medida de los lados, veamos algunos ejemplos

n	Ln
100	$\frac{1}{2^{100}}.\sqrt{2}$
1000	$\frac{1}{2^{1000}}.\sqrt{2}$
10000	$\frac{1}{2^{10000}}.\sqrt{2}$

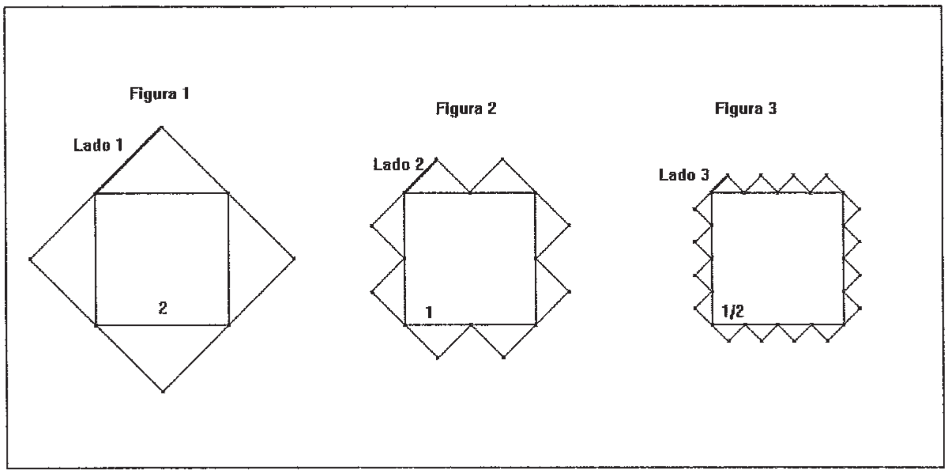
C5

Podemos decir que la sucesión de los lados converge a 0 porque 2^{100} es un número grande; $\frac{1}{\textit{númerogrande}}$ tiende a 0, cuando lo multiplicamos por $\sqrt{2}$, tiende a 0. Lo mismo sucede con 2^{1000} o 2^{10000} etc. Entonces $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^n}.\sqrt{2} = 0$

En términos del problema geométrico cuando $n \to \infty$ los lados son cada ves más chicos y se acercan cada vez más a 0.

7

Ahora repitamos el problema anterior, pero con un lado de 2 cm.

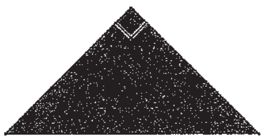


Para calcular los perímetros haremos:

$P_1 = L_1.8 \qquad P_2 = L_2.16 \qquad P_3 = L_3.32 \qquad P_4 = L_4.64$

Calculo de cada lado del triangulo de la figura 1:

Apliquemos Pitágoras



$$x^2 + x^2 = 2^2$$
$$2x^2 = 4$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Cálculo de los lados para la figura 2 para poder calcular el perímetro de la segunda figura.

$$x^2 + x^2 = 1^2$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = 1/2$$
$$x = \sqrt{1/2}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

8

Cálculo de los lados para la figura 3 para poder calcular el perímetro de la tercera figura

$$x^2 + x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow 2x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{8}} \rightarrow x = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8}}$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Cálculo de los lados para la figura 4 para poder calcular el perímetro de la cuarta figura

$$x^2 + x^2 = \left(1/4\right)^2 \rightarrow 2x^2 = 1/16 \rightarrow x^2 = 1/32 \rightarrow x = \sqrt{1/32}$$

$$x = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16.2}} \rightarrow x = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

Para el cuadrado de lado 2cm

B3

Figura	Medida Lados
1	$\sqrt{2}$
2	$1/2\sqrt{2}$
3	$1/4\sqrt{2}$
4	$1/8\sqrt{2}$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sqrt{2}$

C5

$$\boxed{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sqrt{2}}$$

También nos encontramos con una sucesión de $r = \frac{1}{2}$ y $a_1 = \sqrt{2}$. Comparando con la anterior vemos que se trata de "la misma" sucesión desfasada.

Ahora analizaremos el perímetro

B3

Figura	Medida Lados	Perímetro	Resultado
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}.8$	$8\sqrt{2}$
2	$1/2\sqrt{2}$	$\left(1/2\sqrt{2}\right)16$	$8\sqrt{2}$
3	$1/4\sqrt{2}$	$\left(1/4\sqrt{2}\right)32$	$8\sqrt{2}$
4	$1/8\sqrt{2}$	$\left(1/8\sqrt{2}\right)64$	$8\sqrt{2}$

9

El perímetro es constante, siempre nos da $8\sqrt{2}$

<u>Demostración:</u> demostraré que para cualquier figura de la sucesión el perímetro es $8\sqrt{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\sqrt{2}.2^{n+2} \rightarrow 2^{-n(n-1)}\,2^{\frac{1}{2}}.2^{n+2} \rightarrow 2^{-(n-1)+\frac{1}{2}+n+2}$$

$$2^{3+\frac{1}{2}} \rightarrow 2^{3}.2^{\frac{1}{2}} \rightarrow 8.\sqrt{2}$$

Vemos que también es constante pero es el doble de los perímetros del problema del cuadrado de lado 1.

También nos preguntamos que pasa con $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}.\sqrt{2} = 0$ y vemos que también da 0 lo cuál es lógico ya que si aumentamos la cantidad de lados, su medida se reduce.

¿Qué pasará si el lado inicial del cuadrado mide 3?

B3

Figura	Medida Lados	Perímetro
1	$3/2\sqrt{2}$	$(3/2.\sqrt{2})8$
2	$3/4\sqrt{2}$	$(3/4.\sqrt{2})16$
3	$3/8\sqrt{2}$	$(3/8.\sqrt{2})32$
4	$3/16\sqrt{2}$	$(3/16.\sqrt{2})64$
n	$3/2^n\sqrt{2}$	$(3/2^n.\sqrt{2})2^{n+2}$

C5

Entonces podemos generalizar para un cuadrado de lado *k cm.*

C5

Figura	Lado	Perímetro	Resultados
1	$L_1 = \frac{k}{2}.\sqrt{2}$	$\frac{k}{2}.\sqrt{2}.8$	$k.4\sqrt{2}$
2	$L_2 = \frac{k}{4}.\sqrt{2}$	$\frac{k}{4}.\sqrt{2}.16$	$k.4\sqrt{2}$
3	$L_3 = \frac{k}{8}.\sqrt{2}$	$\frac{k}{8}.\sqrt{2}.32$	$k.4\sqrt{2}$
4	$L_4 = \frac{k}{16}.\sqrt{2}$	$\frac{k}{16}.\sqrt{2}.64$	$k.4\sqrt{2}$
n	$L_k = \frac{k}{2^k}\sqrt{2}$	$\left(\frac{k}{2^n}.\sqrt{2}\right).2^{n+2}$	$k.4\sqrt{2}$

10

Si el lado del cuadrado mide k cm. La fórmula que indica la medida del lado seria

$L_k = \frac{k}{2^n}\sqrt{2}$ y su perímetro nos da $k.4\sqrt{2}$

Demostración:

$$\left(\frac{k}{2^n}.\sqrt{2}\right).2^{n+2} \rightarrow \frac{k.2^{1/2}}{2^n}.2^{n+2} \rightarrow k.2^{1/2}.2^2 \rightarrow k.4.\sqrt{2}$$

C5

Conclusión:

D3

A lo largo del trabajo pude ver que las sucesiones tiene una importante aplicación en problemas geométricos los problemas más sencillos como el I y II hasta el más complejo como el III en donde profundizamos más a medida que varié las condiciones del problema. En este problema descubrí que:

- Dada una medida inicial del lado del cuadrado se puede encontrar una sucesión que describe la medida del lado de cada figura y el perímetro de todas las figuras resultó constante,
- También vi que a medida que aumento la cantidad de lados, la medida del lado se reduce de tal manera que cuando $n \rightarrow \infty$, la medida $\rightarrow 0$
- Finalmente pude generalizar el problema comenzando con un cuadrado de lado k cm. (es decir que el problema ya no depende de esta medida) llegando a ver la formula de la sucesión que describe la medida de sus lados $\frac{k}{2^n}.\sqrt{2}$ y su perímetro $k.4\sqrt{2}$
- En general pude ver que las sucesiones aritméticas y geométricas ofrecen un modelo que tiene aplicación en otras áreas de la matemática como la geometría y nos permite conocer fórmulas y por lo tanto poder predecir información.

Fuentes:

F3

- DE GUZMAN, Miguel (y otros) "Matemáticas II" COU Editorial Anaya (1989)
- DE GUZMAN, Miguel "Matemáticas III" Bachillerato Editorial Anaya
- DE SIMONE Irene (y otros) Matemática 4 Editorial AZ

11